Sesiunea I, iulie 2018

Se consideră polinomul $P = X^{20} + X^{10} + X^5 + 2$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$. Notăm cu R restul împărțirii polinomului P prin $X^3 + X$.

1 $P(i)$ este: (A) $2+i$ (B) $1+i$ (C) 2 (D) i (E) 0

2 R este: (A) $2+X+X^2$ (B) $2+X$ (C) $2+X-X^2$ (D) X (E) 1

3 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{x_k - x_k^2}$ este: (A) $\frac{15}{2}$ (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 7

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin x$ este: (A) nu există (B) 0 (C) ∞ (D) $-\infty$ (E) 1

5 Dacă $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\alpha^3 = 1$, atunci $(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^3)(1+\alpha^4)(1+\alpha^5)(1+\alpha^6)$ este:
(A) 64 (B) 0 (C) 16 (D) 4 (E) $8i$

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și fie $A^n = \begin{pmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6 $2A - A^2$ este: (A) $A + I_2$ (B) I_2 (C) $2I_2$ (D) O_2 (E) $A - I_2$

7 A^{48} este: (A) O_2 (B) $2^{12}I_2$ (C) $2^{48}I_2$ (D) $2^{48}A$ (E) $2^{24}I_2$

8 $\dfrac{x_{10}^2 + y_{10}^2}{x_8^2 + y_8^2}$ este: (A) 16 (B) 2 (C) 8 (D) 4 (E) 1

9 Dacă $\lg 5 = a$ și $\lg 6 = b$, atunci $\log_3 2$ este:
(A) $\dfrac{1+a}{a+b+1}$ (B) $\dfrac{1+a}{a-b+1}$ (C) $\dfrac{1-a}{a+b+1}$ (D) $\dfrac{1-a}{a+b-1}$ (E) $\dfrac{1-a}{b-1}$

Calculați:

10 $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ (A) $\ln 2$ (B) $\ln 3$ (C) $\ln 4$ (D) $\ln 5$ (E) $\ln 8$

11 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$

(A) $\operatorname{arctg}\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$ (B) $\operatorname{arctg}\mathrm{e}-\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\operatorname{arctg}\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2+1}$ (D) $\ln\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$ (E) $\ln(2\mathrm{e})$

12 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4x)}{\cos^4 x+\sin^4 x}\mathrm{d}x$ (A) $\ln 2$ (B) $\pi\ln 4$ (C) $\pi\ln 8$ (D) $\ln\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ (E) $\ln(\pi\mathrm{e})$

13 Fie $\{x\}$ partea fracționară a numărului x. Atunci $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\int_0^{\pi}\{x\}^n\mathrm{d}x$ este:

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) 4 (C) 2 (D) π (E) 3

Se consideră în plan punctul $A(0,-1)$, dreptele d_1: $x-y+1=0$, d_2: $2x-y=0$ și punctele $B\in d_1$, $C\in d_2$, astfel încât d_1 și d_2 sunt mediane în triunghiul ABC.

14 Intersecția dreptelor d_1 și d_2 are coordonatele:

(A) $(-1,2)$ (B) $(2,3)$ (C) $(1,2)$ (D) $(-1,0)$ (E) $\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)$

15 Punctul B are coordonatele:

(A) $(3,6)$ (B) $(0,1)$ (C) $(1,2)$ (D) $(-1,0)$ (E) $(-2,-1)$

16 Dacă $x,y\in\mathbb{R}$ verifică relația $2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$, atunci mulțimea valorilor expresiei $\dfrac{x}{y}$ este:

(A) $\{4\}$ (B) $\{1\}$ (C) $\{1,4\}$ (D) $\{1,2,4\}$ (E) $\emptyset$

17 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 9^x+5^x+4}{9^{x+1}-5^x+2^x}$ este: (A) $\dfrac{2}{9}$ (B) 2 (C) 1 (D) $\dfrac{1}{9}$ (E) $+\infty$

18 Dacă $x\in(\pi,2\pi)$ și $\cos x=\dfrac{3}{5}$, atunci $\sin x$ este:

(A) $\dfrac{3}{4}$ (B) $\dfrac{4}{5}$ (C) $-\dfrac{4}{5}$ (D) 1 (E) $-\dfrac{3}{4}$

Pe intervalul $(-1,1)$ se definește legea de compoziție $*$ prin $x*y=\dfrac{2xy+3(x+y)+2}{3xy+2(x+y)+3}$, $x,y\in(-1,1)$.

19 Elementul neutru al legii $*$ este: A 0 B $\frac{2}{3}$ C $-\frac{2}{3}$ D $\frac{1}{3}$ E $-\frac{1}{3}$

20 Dacă funcția $f:(-1,1)\to(0,\infty)$, $f(x)=a\dfrac{1-x}{1+x}$ verifică relația $f(x*y)=f(x)f(y)$, $\forall x,y\in(-1,1)$, atunci a este:

A $-\frac{2}{3}$ B $\frac{2}{3}$ C $-\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{5}$ E $-\frac{1}{5}$

21 Numărul soluțiilor ecuației $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x \text{ de } 10 \text{ ori}}=\dfrac{1}{10}$ este:

A 2 B 0 C 1 D 10 E 5

22 Se consideră șirul cu termeni pozitivi $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_0=1$, $a_1=a$, $a_{n+1}^3=a_n^2a_{n-1}$, $n\geq 1$. Valoarea lui a pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=8$ este:

A 2 B 16 C 8 D 32 E 4

23 Se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(4,5)$. Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuația:

A $2x-y=2$ B $2x+y=10$ C $x+2y=11$ D $-x+y=1$ E $x+y=7$

24 Perechea $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b)=0$ este:

A $\left(2,\frac{3}{2}\right)$ B $(-2,-1)$ C $(-2,-2)$ D $(2,-2)$ E $\left(-2,-\frac{3}{2}\right)$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+ax$, unde a este un parametru real.

25 $f'(0)$ este: A $1+a$ B a C $1-a$ D 1 E 0

26 Graficul lui f este tangent axei Ox dacă:

A $a=2$ B $a=-1$ C $a=1$ D $a=0$ E $a=3$

27 Pentru $a=-3$ numărul punctelor de extrem local ale funcției $g(x)=|f(x)|$, $x\in\mathbb{R}$, este:

A 4 B 1 C 2 D 3 E 5

28 Pentru $a=1$, $(f^{-1})'(2)$ este: A $1/2$ B $1/4$ C $1/3$ D 0 E $+\infty$

Se consideră ecuația: $\cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x = m, m \in \mathbb{R}$.

29 Ecuația admite soluția $x = \frac{\pi}{2}$ pentru:

A $m = \frac{1}{4}$ B $m = 1$ C $m = 0$ D $m = -1$ E $m = -\frac{1}{4}$

30 Ecuația are soluție dacă și numai dacă m aparține intervalului:

A $[-1, 1]$ B $[-4, 4]$ C $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ D $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ E $[-2, 2]$