Sesiunea I, iulie 2018

Pe intervalul $(-1,1)$ se definește legea de compoziție $*$ prin $x * y = \dfrac{2xy+3(x+y)+2}{3xy+2(x+y)+3}$, $x, y \in (-1,1)$.

1 Elementul neutru al legii $*$ este: A 0 B $\frac{2}{3}$ C $-\frac{2}{3}$ D $\frac{1}{3}$ E $-\frac{1}{3}$

2 Dacă funcția $f:(-1,1)\to(0,\infty)$, $f(x)=a\dfrac{1-x}{1+x}$ verifică relația $f(x*y)=f(x)f(y)$, $\forall x,y\in(-1,1)$, atunci a este:

A $-\frac{2}{3}$ B $\frac{2}{3}$ C $-\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{5}$ E $-\frac{1}{5}$

3 Numărul soluțiilor ecuației $\underbrace{x * x * \ldots * x}_{x \text{ de } 10 \text{ ori}} = \frac{1}{10}$ este:

A 2 B 0 C 1 D 10 E 5

4 Dacă $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\alpha^3=1$, atunci $(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^3)(1+\alpha^4)(1+\alpha^5)(1+\alpha^6)$ este:

A 64 B 0 C 16 D 4 E $8i$

5 Dacă $\lg 5 = a$ și $\lg 6 = b$, atunci $\log_3 2$ este:

A $\dfrac{1+a}{a+b+1}$ B $\dfrac{1+a}{a-b+1}$ C $\dfrac{1-a}{a+b+1}$ D $\dfrac{1-a}{a+b-1}$ E $\dfrac{1-a}{b-1}$

6 Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ verifică relația $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$, atunci mulțimea valorilor expresiei $\frac{x}{y}$ este:

A $\{4\}$ B $\{1\}$ C $\{1,4\}$ D $\{1,2,4\}$ E $\emptyset$

7 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} \cdot \sin x$ este: A nu există B 0 C ∞ D $-\infty$ E 1

Se consideră ecuația: $\cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x = m, m \in \mathbb{R}$.

8 Ecuația admite soluția $x = \frac{\pi}{2}$ pentru:

A $m=\frac{1}{4}$ B $m=1$ C $m=0$ D $m=-1$ E $m=-\frac{1}{4}$

9 Ecuația are soluție dacă și numai dacă m aparține intervalului:

A $[-1,1]$ B $[-4,4]$ C $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ D $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ E $[-2,2]$

10 Dacă $x \in (\pi, 2\pi)$ și $\cos x = \frac{3}{5}$, atunci $\sin x$ este:

A $\frac{3}{4}$ B $\frac{4}{5}$ C $-\frac{4}{5}$ D 1 E $-\frac{3}{4}$

11 Se consideră șirul cu termeni pozitivi $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_{n+1}^3 = a_n^2 a_{n-1}$, $n \geq 1$. Valoarea lui a pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 8$ este:

A 2 B 16 C 8 D 32 E 4

12 Se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(4,5)$. Mediatoarea segmentului $[AB]$ are ecuația:

A $2x - y = 2$ B $2x + y = 10$ C $x + 2y = 11$ D $-x + y = 1$ E $x + y = 7$

13 Perechea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+2x+2} - ax - b) = 0$ este:

A $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ B $(-2,-1)$ C $(-2,-2)$ D $(2,-2)$ E $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$

Se consideră polinomul $P = X^{20} + X^{10} + X^5 + 2$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$. Notăm cu R restul împărțirii polinomului P prin $X^3 + X$.

14 $P(i)$ este: A $2+i$ B $1+i$ C 2 D i E 0

15 R este: A $2+X+X^2$ B $2+X$ C $2+X-X^2$ D X E 1

16 $\sum\limits_{k=1}^{20} \frac{1}{x_k - x_k^2}$ este: A $\frac{15}{2}$ B 5 C 6 D 8 E 7

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și fie $A^n = \begin{pmatrix} x_n & -y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Notăm $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

17 $2A - A^2$ este: A $A + I_2$ B I_2 C $2I_2$ D O_2 E $A - I_2$

18 A^{48} este: A O_2 B $2^{12} I_2$ C $2^{48} I_2$ D $2^{48} A$ E $2^{24} I_2$

19 $\frac{x_{10}^2 + y_{10}^2}{x_8^2 + y_8^2}$ este: A 16 B 2 C 8 D 4 E 1

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + ax$, unde a este un parametru real.

20 $f'(0)$ este: A $1+a$ B a C $1-a$ D 1 E 0

21 Graficul lui f este tangent axei Ox dacă:

A $a=2$ B $a=-1$ C $a=1$ D $a=0$ E $a=3$

22 Pentru $a=-3$ numărul punctelor de extrem local ale funcției $g(x) = |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}$, este:

A 4 B 1 C 2 D 3 E 5

23 Pentru $a=1$, $(f^{-1})'(2)$ este: A $1/2$ B $1/4$ C $1/3$ D 0 E $+\infty$

Se consideră în plan punctul $A(0,-1)$, dreptele d_1: $x-y+1=0$, d_2: $2x-y=0$ și punctele $B \in d_1$, $C \in d_2$, astfel încât d_1 și d_2 sunt mediane în triunghiul ABC.

24 Intersecția dreptelor d_1 și d_2 are coordonatele:

A $(-1,2)$ B $(2,3)$ C $(1,2)$ D $(-1,0)$ E $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$

25 Punctul B are coordonatele:

A $(3,6)$ B $(0,1)$ C $(1,2)$ D $(-1,0)$ E $(-2,-1)$

26 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot 9^x + 5^x + 4}{9^{x+1} - 5^x + 2^x}$ este: A $\frac{2}{9}$ B 2 C 1 D $\frac{1}{9}$ E $+\infty$

Calculați:

27 $\displaystyle\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$ A $\ln 2$ B $\ln 3$ C $\ln 4$ D $\ln 5$ E $\ln 8$

28 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$

A $\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$ B $\operatorname{arctg}\mathrm{e} - \frac{\pi}{4}$ C $\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2+1}$ D $\ln\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}$ E $\ln(2\mathrm{e})$

29 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4x)}{\cos^4 x + \sin^4 x}\mathrm{d}x$ A $\ln 2$ B $\pi \ln 4$ C $\pi \ln 8$ D $\ln\left(\frac{\pi}{4}\right)$ E $\ln(\pi\mathrm{e})$

30 Fie $\{x\}$ partea fracționară a numărului x. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\displaystyle\int_0^{\pi} \{x\}^n \mathrm{d}x$ este:

A $\frac{\pi}{2}$ B 4 C 2 D π E 3